Lösungen Klausur Analysis III 19.2.07

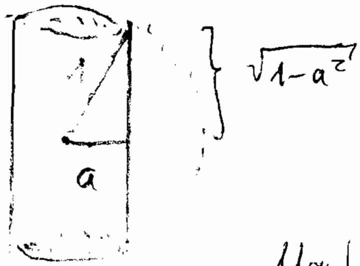
(1) $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le a^2,\ |z| \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$.

Polarkoordinaten für (x,y): $r \le a$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\text{Volumen} = \int_0^a \int_0^{2\pi} 2 \cdot \sqrt{1-r^2}\, r \, d\varphi\, dr$$

$$= 4\pi \int_0^a \sqrt{1-r^2}\, r\, dr \overset{(s=r^2)}{=} 2\pi \int_0^{a^2} \sqrt{1-s}\, ds$$

$$= -\frac{2\cdot 2\pi}{3}(1-s)^{3/2}\Big|_0^{a^2} = 2\pi\cdot\frac{2}{3}\left(1-(1-a^2)^{3/2}\right)$$



Oberfläche = Mantelfläche (Zylinder) + 2 · Fläche der „Kappe"

Mantelfläche = Umfang · Höhe
$= 2\pi a \cdot \sqrt{1-a^2} \cdot 2$

Kappe = Graph von $h(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ für $x^2+y^2 \le a^2$

$$\nabla h = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x,y) \Rightarrow 1+|\nabla h|^2 = 1 + \frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}$$

$$= \frac{1}{1-x^2-y^2}$$

Fläche der Kappe:

$$\int_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{1+|\nabla h|^2} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\, r\, d\varphi\, dr =$$

$$= \pi \int_0^{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-s}}\, ds = -\pi\, 2\sqrt{1-s}\,\Big|_0^{a^2} = 2\pi\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)$$

$\Rightarrow$ Oberfläche $= 4\pi a\sqrt{1-a^2} + 4\pi\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)$

(2.) $f(x,y) = y^2 - \sin x$, dann $M = f^{-1}(0)$.

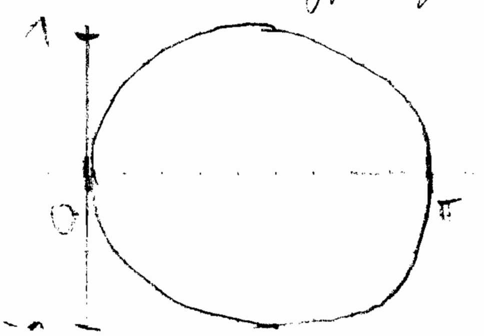
a) $\nabla f(x,y) = (-\cos x, 2y)$

$\nabla f = 0 \Leftrightarrow y = 0,\ x = \pm\frac{\pi}{2}, \dots$ Nur $x = \frac{\pi}{2}$ in $[0,\pi]$.

Aber $x = \frac{\pi}{2}, y = 0 \Rightarrow f(x,y) = 0 - 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ nicht auf M

$\Rightarrow$ Untermannigfaltigkeit (glatte Kurve).



(keine Ecken bei $x = 0, x = \pi$, da Mannigfaltigkeit!)

b) $M = \{(x,y) : y = \pm\sqrt{\sin x}\}$.

Länge von $y = \sqrt{\sin x}$ ist $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\sqrt{\sin x}\right)^2}\, dx$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{4\sin x}}\, dx$$

$\Rightarrow$ Länge von $M = 2\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{4\sin x}}\, dx$

2 c) Tangentialraum bei (x,y) $= \ker Df|_{(x,y)}$

$$= \{(v,w) : \langle (v,w), \nabla f(x,y) \rangle = 0\}$$

$$= \{(v,w) : -v\cos x + 2wy = 0\}.$$

Bei $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$:
Der Punkt liegt nicht auf M, da $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^2$!

Bei $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$: zB $(v,w) = (1,0)$

Bei $(0,0)$: zB $(v,w) = (0,1)$

3 a) Bedingung: $\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$, $V_i := f(\|x\|)\, x_i$

Für $i=j$ ist nichts zu zeigen, und für $i \neq j$ ist

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \|x\|}{\partial x_j} f'(\|x\|) \cdot x_i = \frac{x_i x_j}{\|x\|} f'(\|x\|)$$

Das ist symmetrisch in i,j, also gleich $\frac{\partial V_j}{\partial x_i}$.

b) b1) $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial \|x\|}{\partial x_i} g'(\|x\|) = \frac{x_i}{\|x\|} g'(\|x\|)$

$$\Rightarrow \nabla u(x) = \frac{g'(\|x\|)}{\|x\|} \cdot x$$

b2) $V(x) = \nabla u(x) \overset{\forall x}{\Leftrightarrow} f(\|x\|) \cdot x = \frac{g'(\|x\|)}{\|x\|} x \quad \forall x$

$$\Leftrightarrow f(r) = \frac{g'(r)}{r} \quad \forall r > 0 \qquad (r = \|x\|)$$

("$\Rightarrow$": setze z.B. $x = (r, 0, \dots, 0)$ ein!)
("$\Leftarrow$": klar)

b3) $f(r) = \frac{g'(r)}{r} \Leftrightarrow g'(r) = r \cdot f(r)$

$\Leftrightarrow g =$ eine Stammfunktion zu $r \cdot f(r)$.

$= \int r f(r)\, dr$

b4) $f(r) = \frac{1}{r}$, dann $g(r) = \int 1\, dr = r \quad (+c)$.

Probe: $V(x) = \frac{x}{\|x\|} = \nabla \|x\|$ ✓

4 a) Wahr, u nimmt in $x=0$ sein Minimum an, ist also nach dem Maximumsprinzip konstant, also $u(x) = u(0) = 0 \quad \forall x$.

b) $M = \{(0,0,0)\}$ ist ein Punkt, also eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wahr.

c) Wahr. Wäre $\{f > 0\}$ eine Nullmenge, so könnte man f auf diese Menge zu Null ändern, ohne das Integral zu ändern. Die resultierende Funktion, sagen wir $\tilde{f}$, wäre überall ≤ 0, also

$$\int f = \int \tilde{f} \le 0,$$

im Widerspruch zu Voraussetzung.

d) Falsch. Z.B. $M =$ x-Achse, $N =$ y-Achse, dann $M + N = \mathbb{R}^2$.